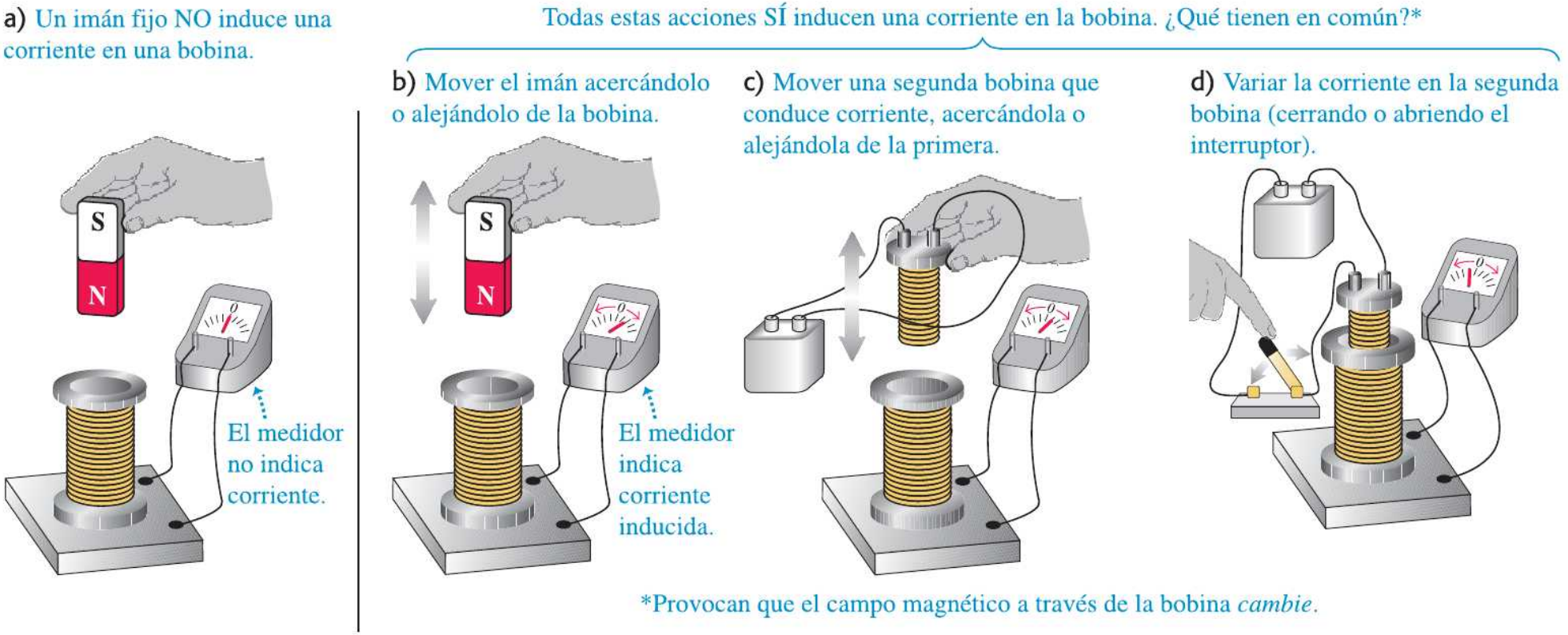
TEMA 5

Inducción magnética

- *Fem* y corriente inducida
- Ley de Faraday
- Ley de Lenz
- *Fem* de movimiento
- Inductancia mutua
- Autoinductancia
- Inductores como elementos de circuito
- Circuitos R-L, L-C y R-L-C

Observación experimental del fenómeno de inducción

En la figura a), una bobina de alambre está conectada a un medidor de corriente. Cuando el imán cercano está inmóvil, el medidor no indica corriente. Esto no es sorprendente, pues en el circuito no hay fuente de *fem*. Pero cuando el imán se mueve y se acerca o se aleja de la bobina (figura b), el medidor indica corriente en el circuito, pero sólo mientras el imán se halla en movimiento. En la figura c) se ha sustituido el imán con una segunda bobina conectada a una batería. Cuando la segunda bobina está fija, no hay corriente en la primera bobina. Sin embargo, cuando movemos la segunda bobina acercándola o alejándola de la primera, o hacemos lo mismo con la primera bobina con respecto a la segunda, hay corriente en la primera bobina, pero, de nuevo, sólo mientras una de las bobinas se mueve con respecto a la otra. En la figura d) la corriente en la segunda bobina se modifica abriendo y cerrando un interruptor, lo que también induce corriente en la primera bobina.


a) Un imán fijo NO induce una corriente en una bobina.
S
N
El medidor no indica corriente.
Todas estas acciones SÍ inducen una corriente en la bobina. ¿Qué tienen en común?*
b) Mover el imán acercándolo o alejándolo de la bobina.
S
N
El medidor indica corriente inducida.
c) Mover una segunda bobina que conduce corriente, acercándola o alejándola de la primera.
d) Variar la corriente en la segunda bobina (cerrando o abriendo el interruptor).
*Provocan que el campo magnético a través de la bobina *cambie*.

Ley de Faraday

La fem inducida en una espira cerrada es igual al negativo de la tasa de cambio del flujo magnético a través de la espira con respecto al tiempo.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

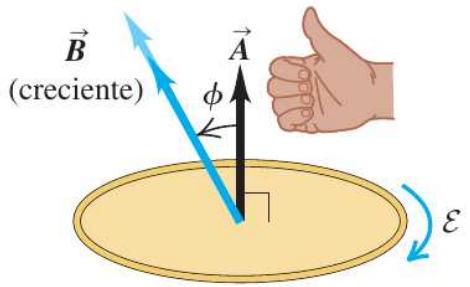
Si se tiene una bobina con N espiras idénticas, y si el flujo varía a la misma tasa a través de cada espira, entonces:

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Ecuaciones de Maxwell:
1) Ley de Gauss para $\vec{E}$
2) Ley de Gauss para $\vec{B}$
3) Ley de Ámpere
4) Ley de Faraday

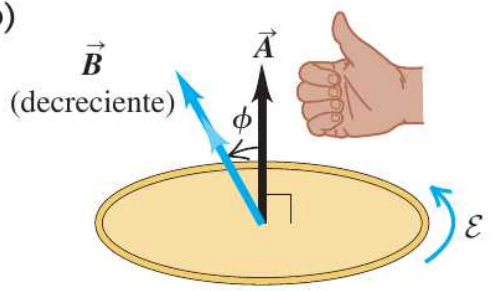
Sentido de la corriente inducida:

a)



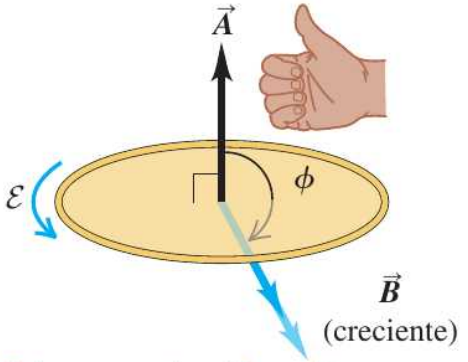
- El flujo es positivo ($\Phi_B > 0$) …
- … y se torna más positivo ($d\Phi_B/dt > 0$).
- La fem inducida es negativa ($\mathcal{E} < 0$).

b)



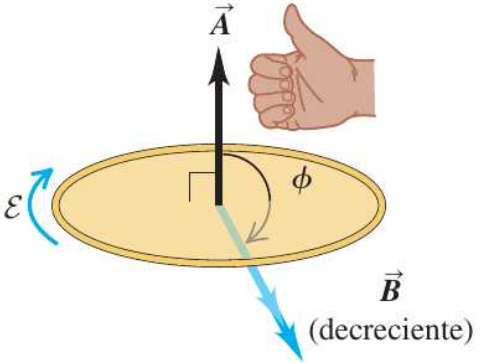
- El flujo es positivo ($\Phi_B > 0$) …
- … y se torna menos positivo ($d\Phi_B/dt < 0$).
- La fem inducida es positiva ($\mathcal{E} > 0$).

c)



- El flujo es negativo ($\Phi_B < 0$) …
- … y se torna más negativo ($d\Phi_B/dt < 0$).
- La fem inducida es positiva ($\mathcal{E} > 0$).

d)



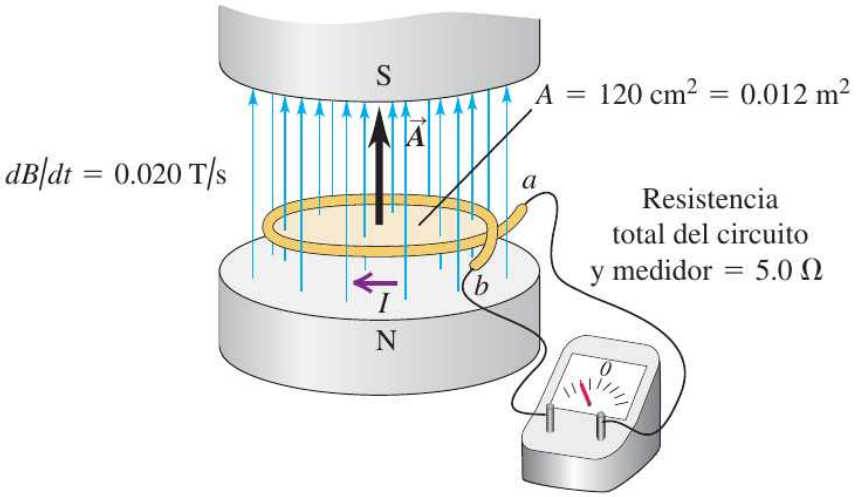
- El flujo es negativo ($\Phi_B < 0$) …
- … y se torna menos negativo ($d\Phi_B/dt > 0$).
- La fem inducida es negativa ($\mathcal{E} < 0$).

Problema *Fem* y corriente inducida en una espira

El campo magnético entre los polos del electroimán de la figura es uniforme en cualquier momento, pero su magnitud se incrementa a razón de 0.020 T/s. El área de la espira conductora de la figura es de 120 cm^2, y la resistencia total del circuito que se muestra, incluyendo el medidor, es de 5.0 Ω. Encuentre la *fem* inducida y la corriente inducida en el circuito.

SOLUCIÓN:

El campo magnético que atraviesa la espira cambia con el tiempo porque la magnitud del campo magnético no es constante. De esta forma, habrá una *fem* inducida en la espira y es posible encontrar su valor empleando la ley de Faraday:



$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(BA)}{dt} = \frac{dB}{dt}A = (0.020\ \text{T/s})(0.012\ \text{m}^2)$$
$$= 2.4 \times 10^{-4}\ \text{V} = 0.24\ \text{mV}$$

Por tanto:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{2.4 \times 10^{-4}\ \text{V}}{5.0\ \Omega} = 4.8 \times 10^{-5}\ \text{A} = 0.048\ \text{mA}$$

El sentido de la corriente inducida es horario.

COMENTARIO:

Esta corriente inducida produce un campo magnético adicional a través de la espira, y la regla de la mano derecha indica que la dirección de este campo es opuesta al campo creciente producido por el electroimán. Éste es un ejemplo de una regla general llamada ley de Lenz, la cual dice que cualquier efecto de inducción tiende a oponerse al cambio que lo ocasionó; en este caso, el cambio es el incremento en el flujo del campo del electroimán a través de la espira. Estudiaremos esta ley más adelante.

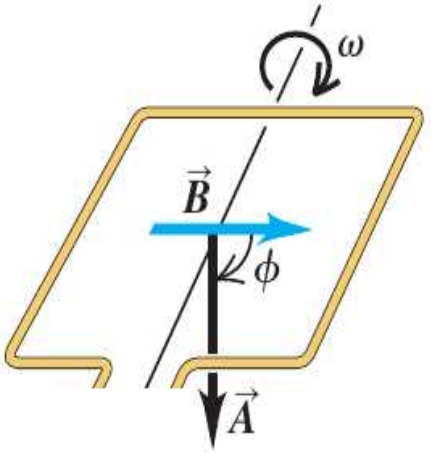
Problema Un alternador simple

La figura muestra una versión sencilla de un alternador, un dispositivo que genera una *fem*. Se hace girar una espira rectangular con velocidad angular constante ω alrededor del eje que se indica en presencia de un campo magnético uniforme y constante. En el momento t=0, ϕ=0. El sistema se ilustra para el momento en que el ángulo $\phi=\omega t=90°$. Determine la *fem* inducida.

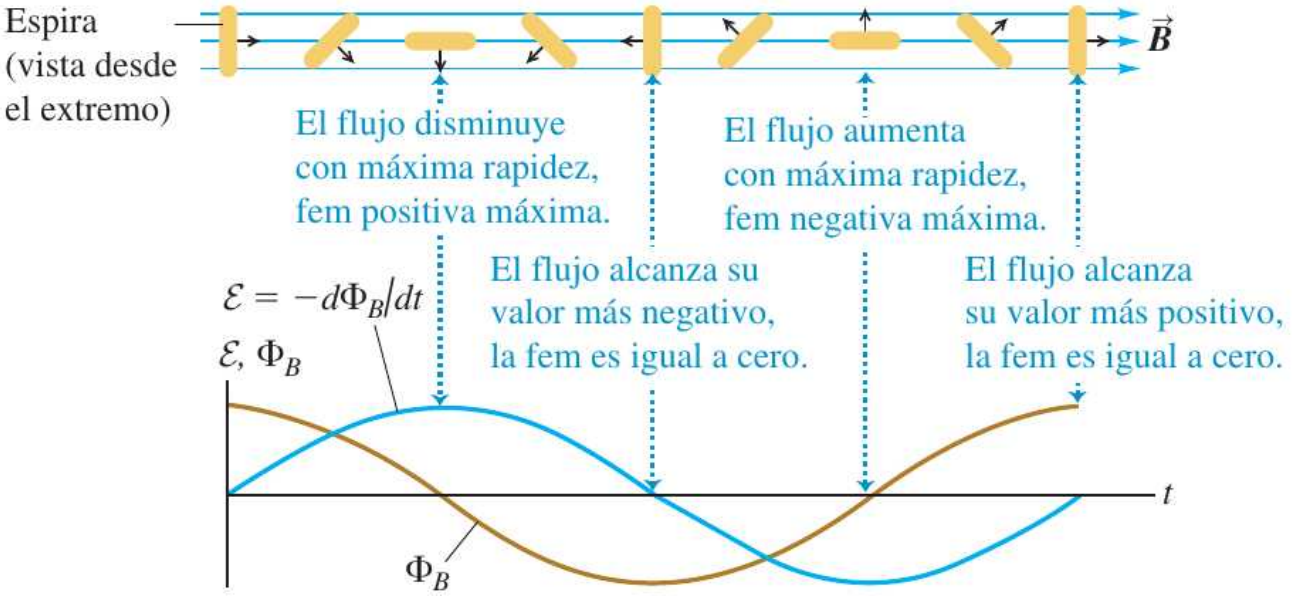
SOLUCIÓN:

La *fem* inducida es producto de un flujo magnético variable. Sin embargo, en esta situación el campo magnético es constante; el flujo cambia porque la dirección del vector de área de la espira cambia cuando ésta gira.

$$\Phi_B = BA\cos\phi = BA\cos\omega t \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \omega BA\,\text{sen}\,\omega t$$



COMENTARIO:

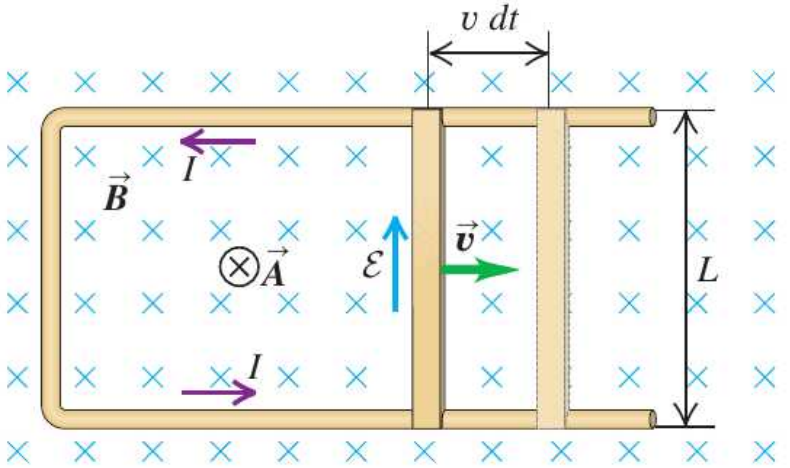


La *fem* inducida no depende de la forma de la espira, sino sólo de su área, y varía en forma sinusoidal con respecto al tiempo. Podemos utilizar el alternador como fuente de fem en un circuito externo, en el que la corriente resultante será alterna, cuya magnitud y sentido también varían en forma sinusoidal. Por esta razón, un alternador también recibe el nombre de generador de corriente alterna (ca). La amplitud de la *fem* aumenta si se incrementa la velocidad de rotación, la magnitud del campo o el área de la espira, o bien, utilizando N espiras en vez de una sola.

Problema Generador de corriente corredizo

La figura muestra un conductor en forma de U en un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la figura. Colocamos una varilla de metal con longitud *L* entre los dos brazos del conductor para formar un circuito, y movemos la varilla hacia la derecha con velocidad *v* constante. Determine la magnitud y dirección de la *fem* inducida resultante.

SOLUCIÓN:



El flujo magnético cambia porque el área de la espira, limitada a la derecha por la varilla móvil, cambia.

Elegimos el vector de área como se indica en la figura. Con esta elección, una *fem* positiva será aquella que esté dirigida en el sentido horario alrededor de la espira.

$$\Phi_B = BA \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B\frac{dA}{dt}$$

El cambio en el área de la espira *dA* en un intervalo de tiempo *dt* es:

$$dA = Lv\,dt$$

Por tanto:

$$\mathcal{E} = -B\frac{Lv\,dt}{dt} = -BLv$$

El signo negativo nos indica que la *fem* está dirigida en el sentido antihorario alrededor de la espira, al igual que la corriente inducida.

COMENTARIO: La *fem* es constante si la velocidad de la varilla es constante. En este caso, el sistema actúa como un generador de corriente directa.

Ley de Lenz

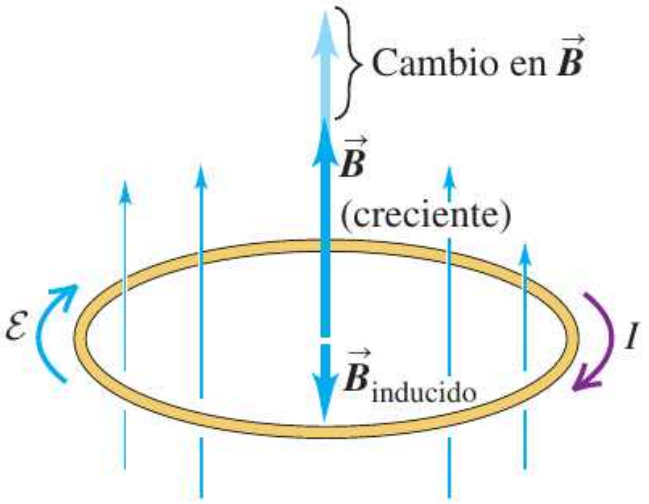
La ley de Lenz es un método alternativo para determinar la dirección de una corriente o *fem* inducida. No es un principio independiente; se puede obtener de la ley de Faraday y siempre da los mismos resultados que ella, pero a menudo es más fácil de usar y ayuda a entender de manera intuitiva los distintos efectos de la inducción.

La dirección de cualquier efecto de la inducción magnética es la que se opone a la causa del efecto.

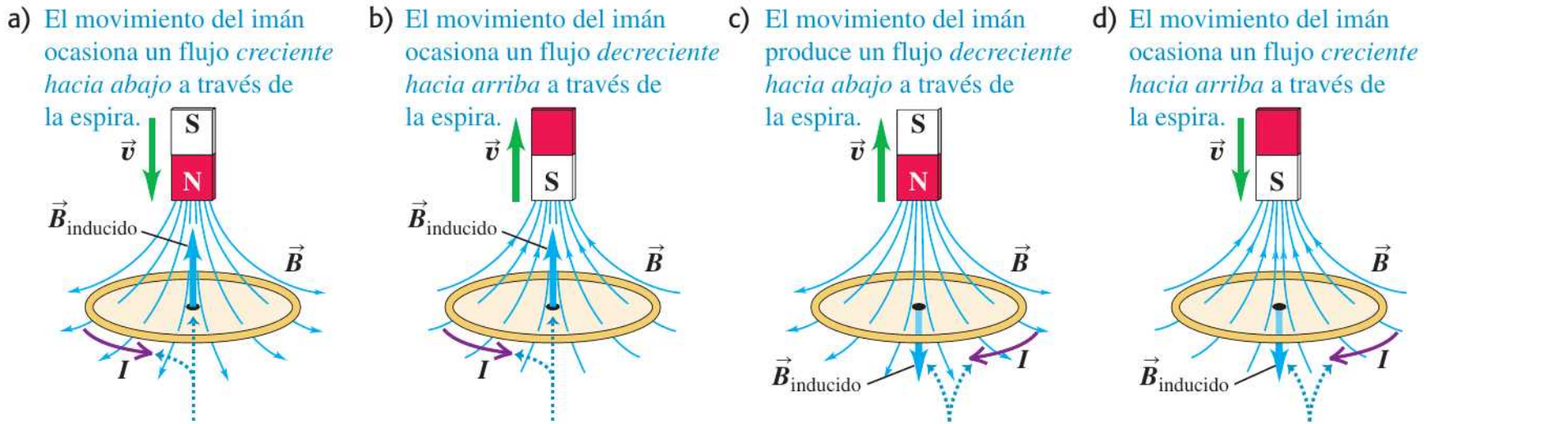
La "causa" puede ser un flujo cambiante a través de un circuito fijo debido a un campo magnético variable, un flujo que cambia por el movimiento de los conductores que constituyen el circuito, o cualquier combinación de lo anterior.

– Si el flujo en un circuito fijo cambia debido a un cambio en el campo magnético, la corriente inducida establece un campo magnético por sí misma que será opuesto al campo original si éste incrementa, o con su mismo sentido si éste disminuye. Es decir, la corriente inducida se opone al cambio en el flujo a través del circuito (no al flujo en sí).

– Si el cambio del flujo se debe al movimiento de los conductores, la dirección de la corriente inducida en el conductor en movimiento es tal que la dirección de la fuerza magnética que ejerce sobre el conductor el campo magnético inducido sea opuesta a la dirección de su movimiento. Así, el movimiento del conductor, que provocó la corriente inducida, encuentra oposición.



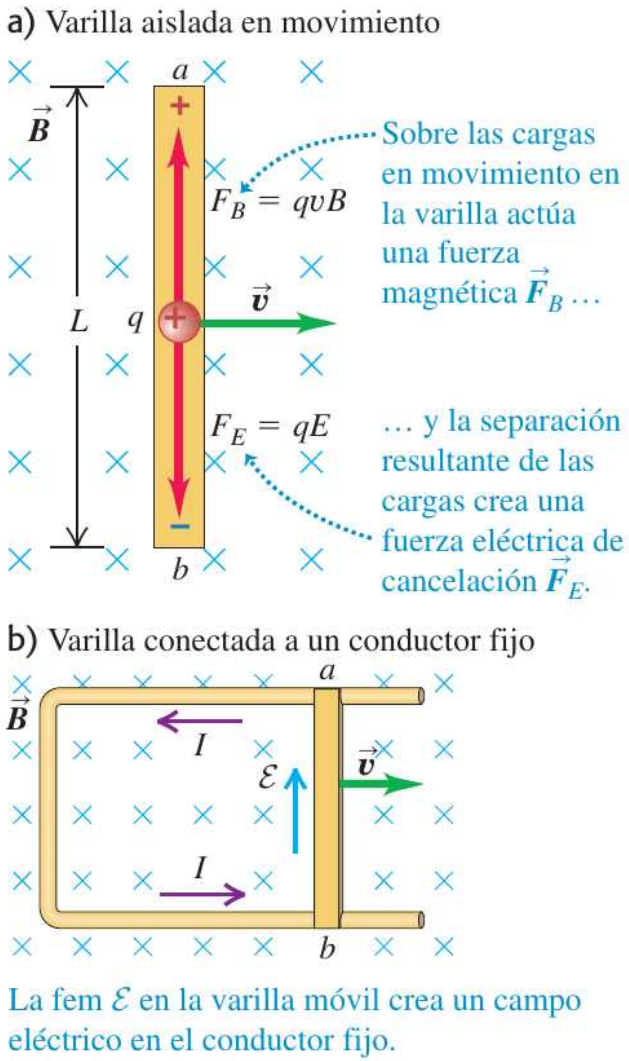
Ley de Lenz


a) El movimiento del imán ocasiona un flujo *creciente hacia abajo* a través de la espira.
b) El movimiento del imán ocasiona un flujo *decreciente hacia arriba* a través de la espira.
c) El movimiento del imán produce un flujo *decreciente hacia abajo* a través de la espira.
d) El movimiento del imán ocasiona un flujo *creciente hacia arriba* a través de la espira.
S
N
$\vec{v}$
$\vec{B}_{\text{inducido}}$
$\vec{B}$
I
El campo magnético inducido es *hacia arriba* para oponerse al cambio del flujo. Para producir el campo inducido, la corriente inducida debe ir *en sentido antihorario*, vista desde arriba de la espira.
El campo magnético inducido es *hacia abajo* para oponerse al cambio del flujo. Para producir este campo inducido, la corriente inducida debe ir *en sentido horario*, vista desde arriba de la espira.

Simulador: https://phet.colorado.edu/es/simulation/faradays-law

Fem de movimiento

Hemos visto algunos ejemplos en los que un conductor se mueve en presencia de un campo magnético constante, lo que provoca, según la ley de Farady, una *fem* inducida en él (*fem* de movimiento). Podemos tener una perspectiva más amplia sobre el origen de la *fem* inducida en estas situaciones considerando las fuerzas magnéticas que actúan sobre las cargas móviles en el conductor.



En el ejemplo de la figura, cuando movemos la varilla hacia la derecha a una velocidad constante, las partículas con carga en la varilla conductora experimentan una fuerza magnética:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Esta fuerza magnética hace que las cargas libres en la varilla se muevan, lo que crea un exceso de carga positiva en el extremo superior *a* y de carga negativa en el extremo inferior *b*. Esto, a la vez, crea un campo eléctrico en el interior de la varilla, en el sentido que va de *a* hacia *b*. La carga continúa acumulándose en los extremos de la varilla hasta que el campo eléctrico se hace suficientemente grande para que la fuerza eléctrica (qE) hacia cancele la fuerza magnética hacia arriba (qvB) y las cargas están en equilibrio, es decir cuando $E=vB$. Entonces, la diferencia de potencial entres *a* y *b* será:

$$V_{ab} = EL = vBL$$

siendo el potencial en *a* mayor que en *b*.

Esta diferencia de potencial es la *fem* (ε) que alimenta el circuito cuando la varilla está en contacto con el conductor fijo en forma de U.

Fem de movimiento

Generalizando, la *fem* de movimiento para cualquier espira conductora cerrada:

$$\mathcal{E} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Esta ecuación sólo representa una formulación alternativa de la ley de Faraday, que con frecuencia es más conveniente que la forma original para resolver problemas con conductores móviles. Pero cuando se tienen conductores fijos en campos magnéticos cambiantes, sólo podremos recurrir a la ley de Faraday

Problema Disco de Faraday

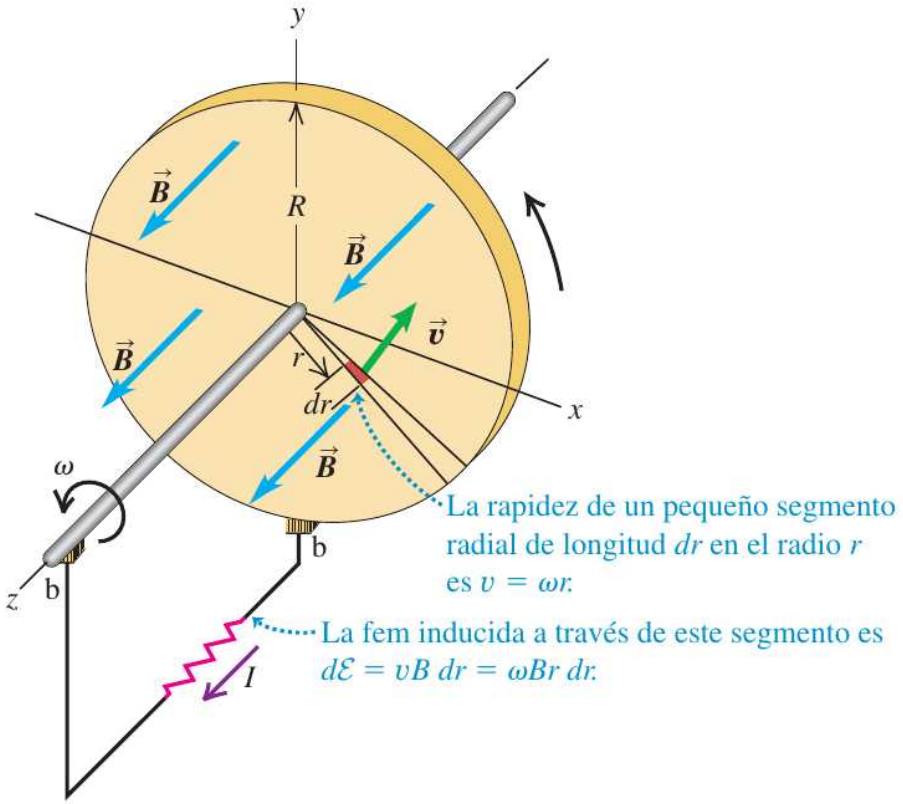
Un disco conductor con radio *R* (como el de la figura) está en el plano xy y gira con velocidad angular constante ω alrededor del eje z. El disco está en un campo magnético constante, uniforme, paralelo al eje z. Calcule la *fem* inducida entre el centro y el borde del disco.

SOLUCIÓN:

Podemos calcular la fem de movimiento utilizando la expresión:

$$\mathcal{E} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Los vectores de la velocidad lineal y del campo omagnético son perpendiculares en cualquier punto del disco (el resultado de su producto vectorial es un vector en la dirección radial, en sentido positivo), aunque se puede ver que el módulo de la velocidad lineal es mayor en el borde del disco que en el centro (esto no nos afecta).



La *fem* inducida entre estos extremos será:

$$\mathcal{E} = \int_0^R \omega B r \, dr = \frac{1}{2}\omega B R^2$$

COMENTARIO:

Este dispositivo puede usarse como fuente de *fem* en un circuito completando el circuito por medio de escobillas fijas (*b*, en la figura) que hagan contacto con el disco y su eje de conducción, como se indica. Como la *fem* que produce es constante en el tiempo, se trata de un generador de corriente directa.

Inductancia mutua

Consideremos **dos circuitos independientes**, dos bobinas de alambre cerca una de la otra, como se ilustra en la figura. Una corriente que circule por la bobina 1 produce un campo magnético y, por lo tanto, un flujo magnético a través de la bobina 2. Si la corriente en la bobina 1 cambia, el flujo a través de la bobina 2 también cambia. De acuerdo con la ley de Faraday, esto induce una *fem* en la bobina 2:

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{B2}}{dt}$$

De este modo, **un cambio en la corriente de un circuito puede inducir otra corriente en un segundo circuito**.

Para analizar en detalle esta situación, representareos las cantidades que varían con el tiempo usando letras minúsculas. El campo magnético que genera i_1 es proporcional a i_1, de modo que el flujo de campo magnético a través de la bobina 2 también es proporcional a i_1:

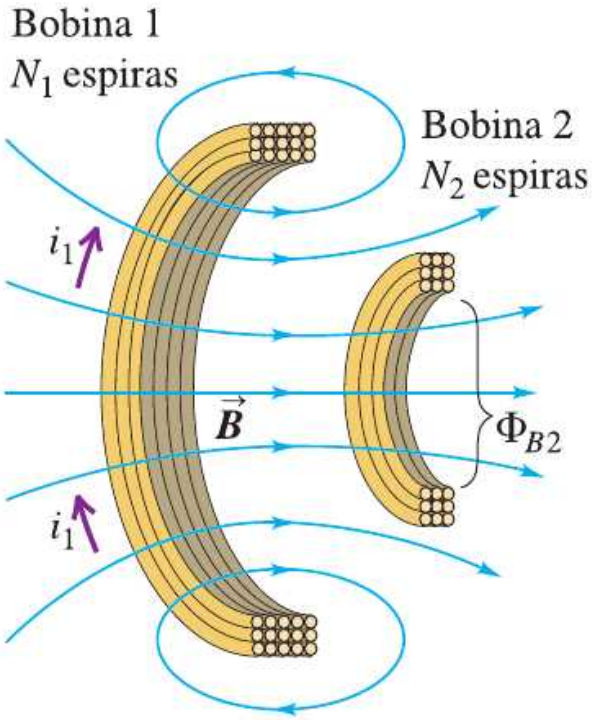
$$N_2\Phi_{B2} = M_{21} i_1$$

La constante de proporcionalidad, M_{21}, recibe el nombre de inductancia mutua de las dos bobinas. Resulta que $M_{21}=M_{12}=M$.

De esta manera:

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

Inductancia mutua: si la corriente en la bobina 1 está cambiando, el flujo cambiante a través de la bobina 2 induce una fem en esta última.



Inductancia mutua

Por tanto:

$$\mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt}$$

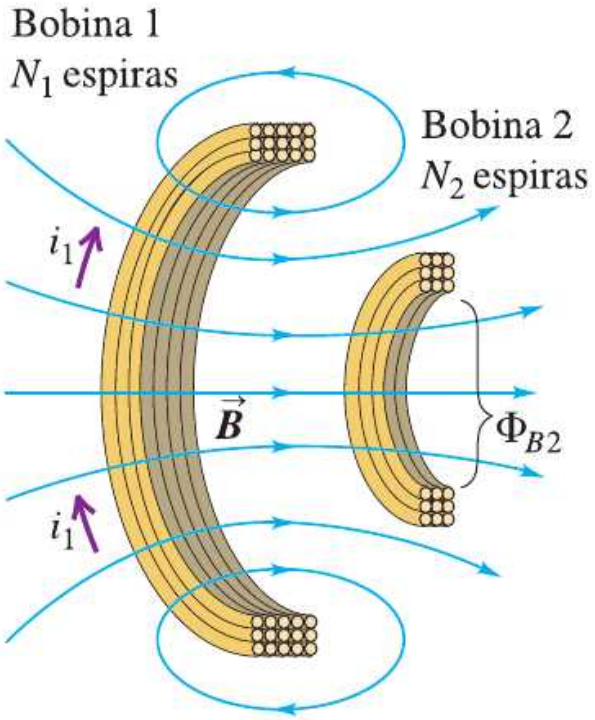
Donde la inductancia mutua está definida como:

$$M = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1\Phi_{B1}}{i_2}$$

La unidad en el SI para la inductancia mutua se llama **henry** (1 H):

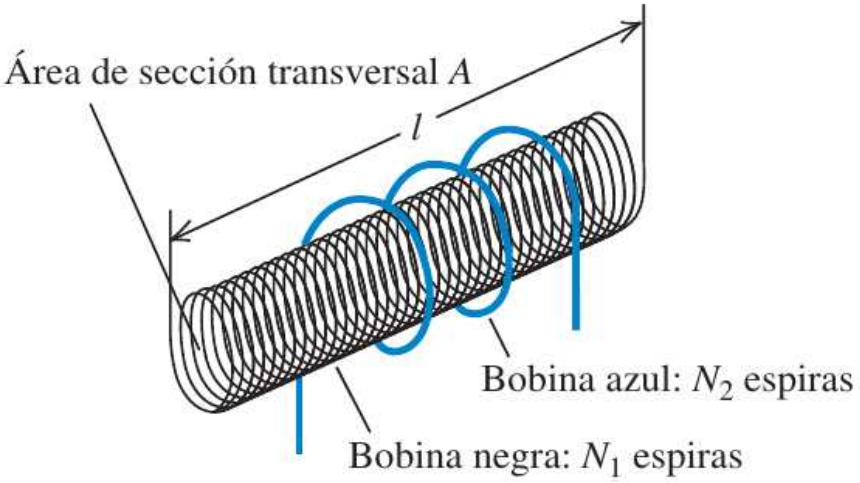
$$1\ \text{H} = 1\ \text{Wb/A} = 1\ \text{V}\cdot\text{s/A} = 1\ \Omega\cdot\text{s} = 1\ \text{J/A}^2$$

Inductancia mutua: si la corriente en la bobina 1 está cambiando, el flujo cambiante a través de la bobina 2 induce una fem en esta última.



Problema Inductancia mutua en solenoides concéntricos

Un solenoide largo con longitud l=0.5 m y área de la sección transversal A=10 cm^2, tiene un devanado muy compacto con N_1=1000 espiras de alambre. Una bobina con N_2=10 espiras lo circunda concéntricamente, como se ilustra. (a) Calcule la inductancia mutua. (b) Si la corriente en la bobina exterior está dada por la expresión i_2=2.0·10^6t A/s, calcule el flujo magnético a través de cada espira del solenoide 1 causado por la corriente en la bobina exterior en t=3 μs. (c) ¿Cuál es la fem inducida en el solenoide 1 en ese instante?



SOLUCIÓN:

(a) En este montaje, la inductancia mutua ocurre porque la corriente en una de las bobinas establece un campo magnético a lo largo de su eje que ocasiona un flujo a través de la otra. La magnitud del campo magnético creado por la bobina 1, cuando por ella circula una conrriente, es, como vimos en el tema anterior:

$$B_1 = \mu_0 n_1 i_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l}$$

El flujo a través de una sección transversal del solenoide 1 es igual a B_1A. Como un solenoide muy largo no produce campo magnético por fuera de sus espiras, este flujo también es igual al flujo a través de cada espira de la bobina circundante exterior, sin importar cuál sea el área de la sección transversal de la bobina exterior. Por tanto:

$$M = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_2 B_1 A}{i_1} = \frac{N_2}{i_1}\frac{\mu_0 N_1 i_1}{l}A = \frac{\mu_0 A N_1 N_2}{l} = 25\ \mu\text{H}$$

(b) En t=3 μs, i_2=6 A. Por tanto:

$$\Phi_{B1} = \frac{Mi_2}{N_1} = \frac{(25\times10^{-6}\ \text{H})(6.0\ \text{A})}{1000} = 1.5\times10^{-7}\ \text{Wb}$$

(c) $$\mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} = -(25\times10^{-6}\ \text{H})\frac{d}{dt}[(2.0\times10^6\ \text{A/s})t] = -(25\times10^{-6}\ \text{H})(2.0\times10^6\ \text{A/s}) = -50\ \text{V}$$

Autoinductancia

En el análisis de la inductancia mutua consideramos dos circuitos separados e independientes: la corriente en un circuito crea un campo magnético que da origen a un flujo a través del segundo circuito. Si cambia la corriente en el primer circuito, el flujo en el segundo circuito cambia y en éste se induce una *fem*.

Si consideramos **un solo circuito aislado** por el que circula una corriente, ésta induce un campo magnético que crea un flujo magnético a través del mismo circuito. Si la corriente es variable, el flujo también lo es, lo que genera una ***fem* autoinducida** adicional en el circuito. Según la ley de Lenz, una *fem* autoinducida siempre **se opone al cambio en la corriente que causó la *fem***, y de ese modo hace más difícil que haya variaciones en la corriente.

Puede haber *fem* autoinducidas en cualquier circuito, ya que siempre hay algún flujo magnético a través de la espira cerrada de un circuito que conduce corriente. Pero el efecto se intensifica si el circuito incluye una bobina con *N* espiras.

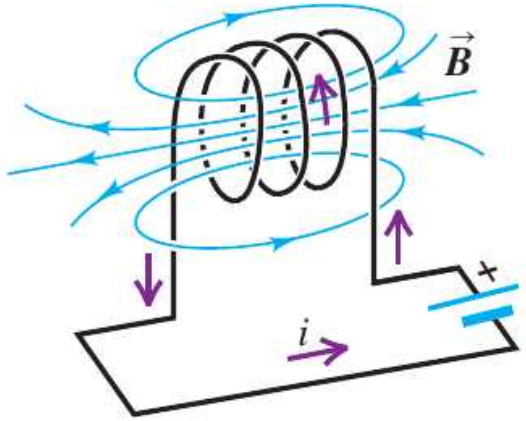
De forma análoga a la definición de inductancia mutua, se define la autoinductancia *L* de un circuito como:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

Y la *fem* autoinducida, de acuerdo con la ley de Faraday, será:

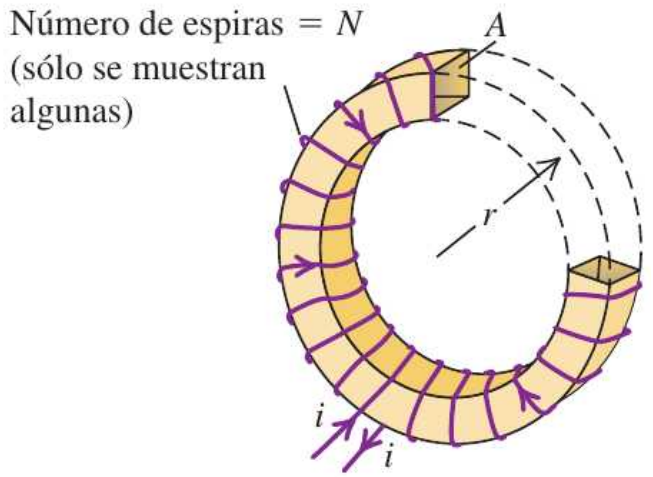
$$\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt}$$

Autoinductancia: si la corriente *i* en la bobina está cambiando, el flujo cambiante a través de ésta induce una fem en la bobina.



Problema Autoinductancia de un toroide

Un solenoide toroidal con sección transversal de área A y radio medio r, tiene un devanado compacto con N espiras alrededor de un núcleo no magnético. (a) Determine su autoinductancia. Para ello, suponga que el campo magnético es uniforme en toda la sección transversal (es decir, ignore su variación con la distancia a partir del eje del toroide). (b) Si la corriente en el solenoide toroidal se incrementa de manera uniforme de 0 a 6.0 A en 3.0 μs, calcule la magnitud y sentido de la *fem* autoinducida.



SOLUCIÓN:

(a) Utilizamos la definición de autoinductancia: $L = \dfrac{N\Phi_B}{i}$

En un problema del tema 4 encontramos que la magnitud del campo magnético a una distancia r de su centro es $\mu_0 Ni/2\pi r$. Si suponemos que el campo tiene esta magnitud en toda el área A de la sección transversal, como nos dicen, entonces el flujo magnético a través de la sección transversal es:

$$\Phi_B = BA = \frac{\mu_0 NiA}{2\pi r}$$

Y la autoinductancia es:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}$$

(b)La tasa de cambio de la corriente en el solenoide es:

$$di/dt = (6.0\,\text{A})/(3.0 \times 10^{-6}\,\text{s}) = 2.0 \times 10^{6}\,\text{A/s}$$

Por tanto:

$$|\mathcal{E}| = L\left|\frac{di}{dt}\right| = (40 \times 10^{-6}\,\text{H})(2.0 \times 10^{6}\,\text{A/s}) = 80\,\text{V}$$

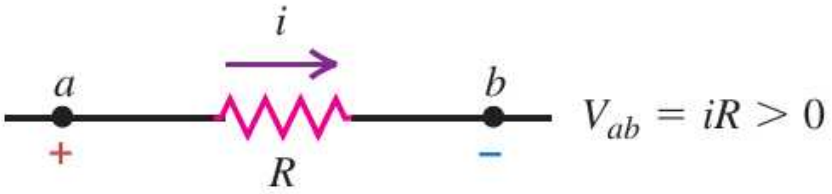
El sentido de esta *fem* es opuesto al de la corriente (ley de Lenz).

Inductores como elementos de un circuito

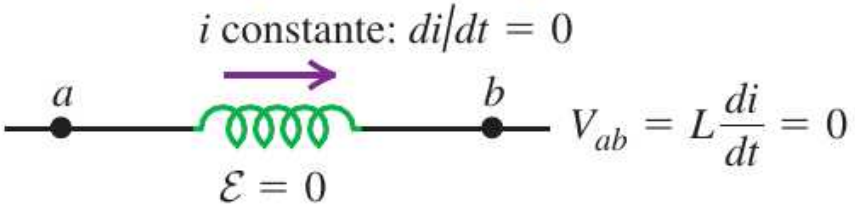
Un elemento de circuito diseñado para tener una (auto)inductancia particular se llama inductor, o bobina de autoinducción. La autoinducción del resto del circuito suele despreciarse frente a la de un inductor. Su finalidad es oponerse a cualquier variación en la corriente a través del circuito. Un inductor en un circuito de corriente directa ayuda a mantener una corriente estable a pesar de las fluctuaciones en la *fem* aplicada; en un circuito de corriente alterna, un inductor tiende a suprimir las variaciones de la corriente que ocurran más rápido de lo deseado.

La magnitud de la caída de potencial a través de un inductor es igual a la de la *fem* autoinducida, pero su signo es opuesto (no haremos esta demostración). Recordad siempre que la *fem* autoinducida no se opone a la corriente *i* en sí (como un resistor), sino a los cambios (*di/dt*) en la corriente.

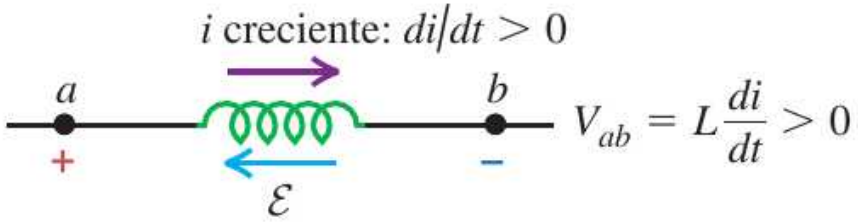
a) Resistor con corriente *i* que fluye de *a* a *b*: el potencial disminuye de *a* a *b*.



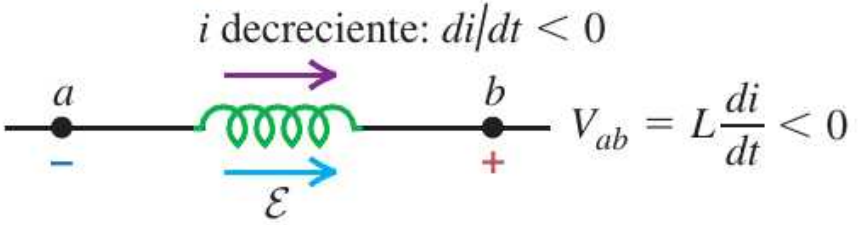
b) Inductor con corriente *constante i* que fluye de *a* a *b*: no hay diferencia de potencial.



c) Inductor con corriente *i creciente* que fluye de *a* a *b*: el potencial disminuye de *a* a *b*.

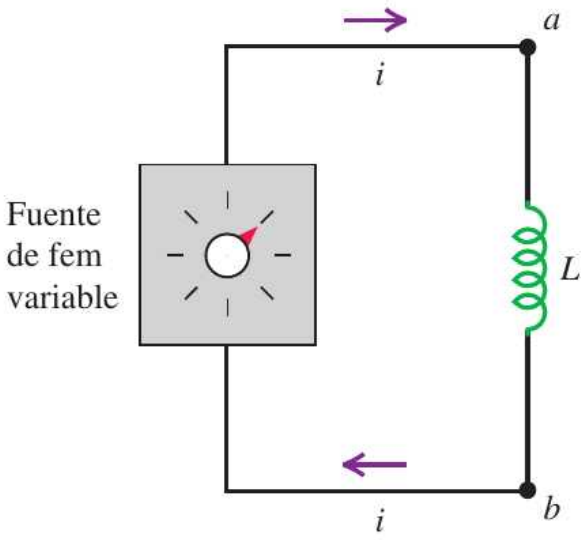


d) Inductor con corriente *i decreciente* que fluye de *a* a *b*: el potencial se incrementa de *a* a *b*.



Inductores como elementos de un circuito

Un inductor almacena energía magnética igual que un capacitor almacena energía eléctrica.



En la figura, una corriente creciente i en el inductor produce una *fem* entre sus terminales, y una diferencia de potencial correspondiente entre las terminales de la fuente, con el punto a a mayor potencial que el b. Así, la fuente debe estar agregando energía al inductor, y la potencia instantánea (la tasa de transferencia de energía al inductor) es:

$$P = V_{ab} i = Li\frac{di}{dt}$$

La energía dU suministrada al inductor durante un intervalo de tiempo infinitesimal dt es $dU=Pdt$, por lo que:

$$dU = Li\,di$$

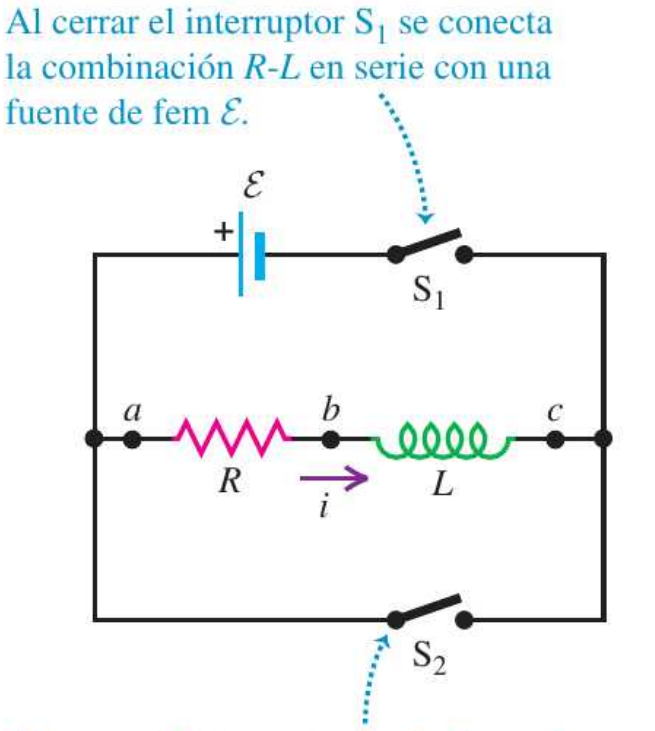
Por tanto la energía total U suministrada por la fuente y almacenada en el inductor mientras la corriente aumenta de cero a un valor final I es:

$$U = L\int_0^I i\,di = \frac{1}{2}LI^2$$

Una vez que la corriente ha alcanzado su valor final estable I, $di/dt=0$, y no se alimenta más energía al inductor. Cuando la corriente disminuye de I a cero, el inductor actúa como fuente que suministra una cantidad total de energía igual a $LI^2/2$ al circuito externo.

Circuitos R-L: corriente creciente

Consideremos el circuito de la figura. Al cerrar el interruptor S_1 se conecta la combinación R-L a una fuente con *fem* constante ε. Suponemos que la fuente tiene resistencia interna igual a cero, por lo que el voltaje terminal es igual a la *fem*.



Suponga que, en un principio, ambos interruptores están abiertos, y luego, en cierto momento inicial t=0 se cierra el interruptor S_1. La corriente no cambia súbitamente de cero a algún valor final, sino que comienza a crecer con una tasa que sólo depende del valor de L en el circuito.

Sea i la corriente en cierto momento t después de que se cerró el interruptor S_1, y di/dt su tasa de cambio en ese instante. Entonces:

$$v_{ab} = iR$$

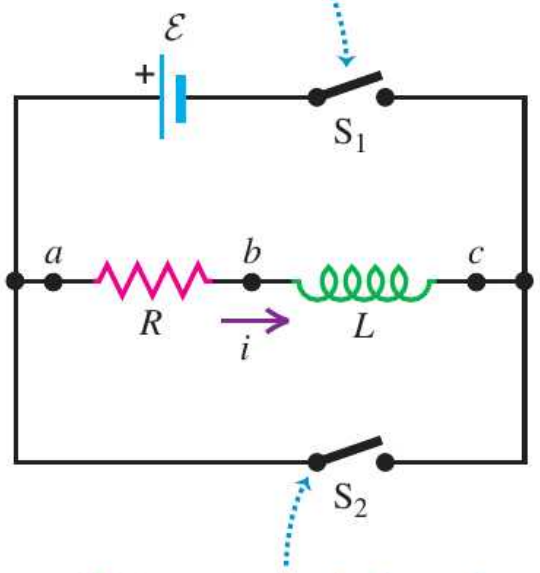
$$v_{bc} = L\frac{di}{dt}$$

Aplicando la regla de Kirchoff de las espiras:

$$\mathcal{E} - ir - L\frac{di}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E} - iR}{L} = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}i$$

Circuitos R-L: corriente creciente

Al cerrar el interruptor S_1 se conecta la combinación *R-L* en serie con una fuente de fem $\mathcal{E}$.



Al cerrar el interruptor S_2 al mismo tiempo que se abre S_1 se desconecta la combinación de la fuente.

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E} - iR}{L} = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}i$$

En el instante en que el interruptor S_1 se cierra por primera vez, i=0 y la caída del potencial a través de *R* es igual a cero. La tasa de cambio inicial de la corriente es:

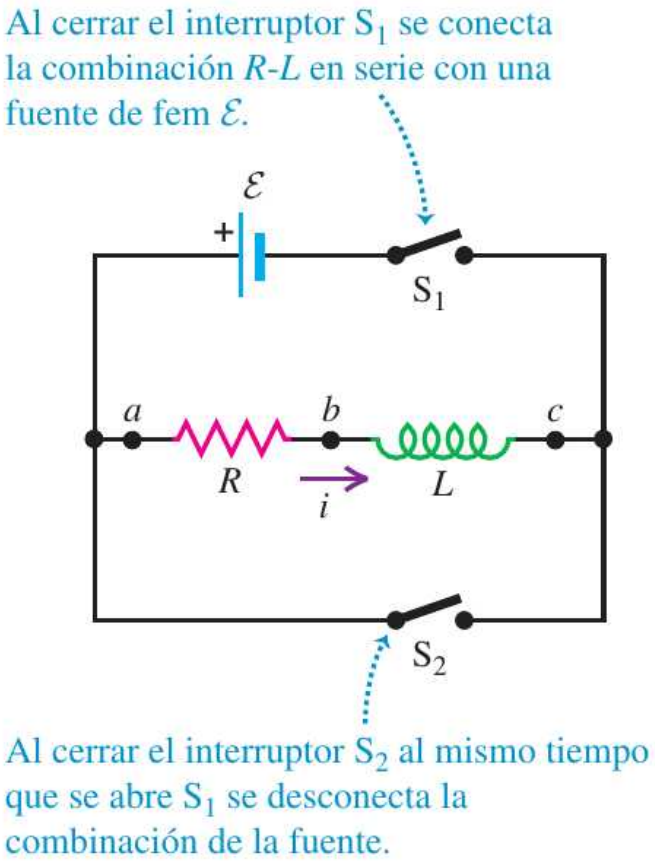
$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{\text{inicial}} = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

Como se esperaba, cuanto mayor es la inductancia, con más lentitud aumenta la corriente, ya que el papel del inductor es oponerse a los cambios en la corriente. De hecho, conforme aumenta la corriente, el término *Ri/L* también aumenta haciendo que la tasa de incremento de la corriente se haga cada vez más pequeña. Esto significa que la corriente se acerca a un valor final *I*. Cuando la corriente alcanza ese valor, su tasa de incremento es igual a cero. Entonces:

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{\text{final}} = 0 = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

La corriente final no depende de la inductancia.

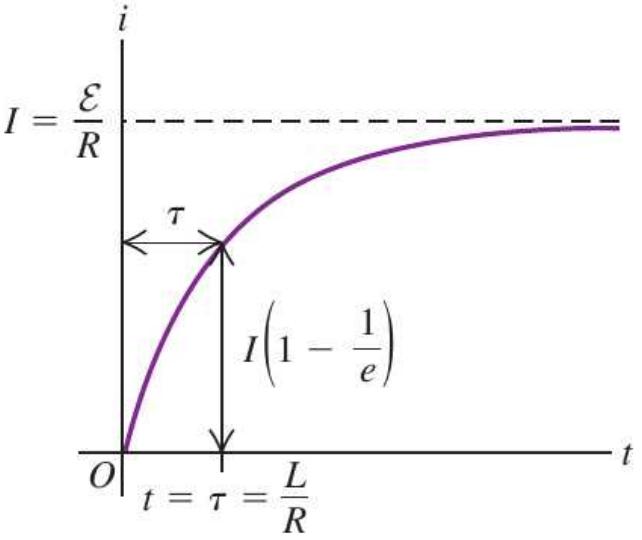
Circuitos R-L: corriente creciente



$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E} - iR}{L} = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}i$$

Resolviendo esta ecuación diferencial, encontramos la expresión de *i* en función del tiempo:

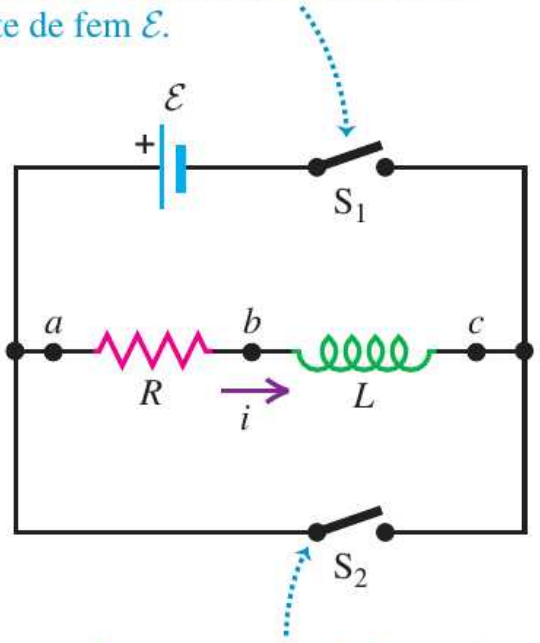
$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right)$$



La cantidad *L/R* es una medida de la rapidez con que la corriente se aproxima a su valor final (cuando *L* es pequeña, la corriente aumenta con rapidez hasta su valor final; cuando *L* es grande, crece con más lentitud). Esta cantidad se llama **constante de tiempo** del circuito:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

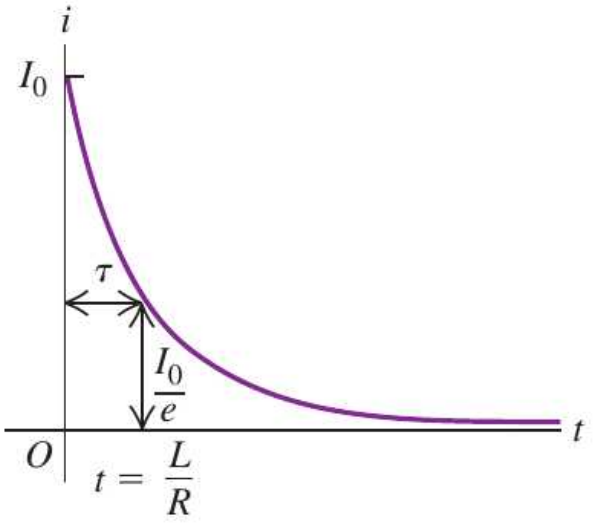
Circuitos R-L: decaimiento de la corriente



Ahora supongamos que el interruptor S_1 ha permanecido cerrado por un tiempo y la corriente ha alcanzado el valor I_0. Se reinicia el cronómetro para redefinir el tiempo inicial: se cierra el interruptor S_2 en el momento t=0. Al mismo tiempo se debe abrir S_1 para que no se arruine la batería.

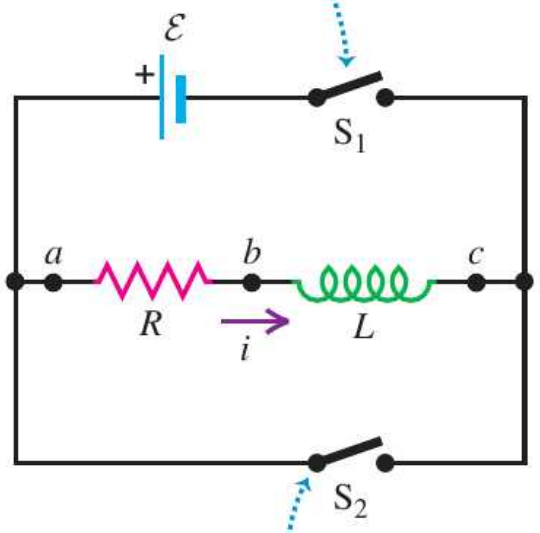
Aplicando la regla de Kirchoff de las espiras y resolviendo para i, encontramos que la corriente a través de R y L se reduce según la expresión:

$$i = I_0 e^{-(R/L)t}$$



Circuitos R-L: almacenamiento y suministro de energía en y por el inductor

Al cerrar el interruptor S_1 se conecta la combinación *R-L* en serie con una fuente de fem $\mathcal{E}$.



Al cerrar el interruptor S_2 al mismo tiempo que se abre S_1 se desconecta la combinación de la fuente.

Cuando S_1 se cierra (crecimiento de la corriente), aplicando la regla de Kirchoff de las espiras y multiplicando por *i* todos términos de la ecuación, tenemos:

$$\mathcal{E}i = i^2R + Li\frac{di}{dt}$$

- $\mathcal{E}i$: tasa de energía suministrada por la fuente
- i^2R: tasa de energía disipada en el resistor
- $Li\frac{di}{dt}$: tasa de energía almacenada en el inductor

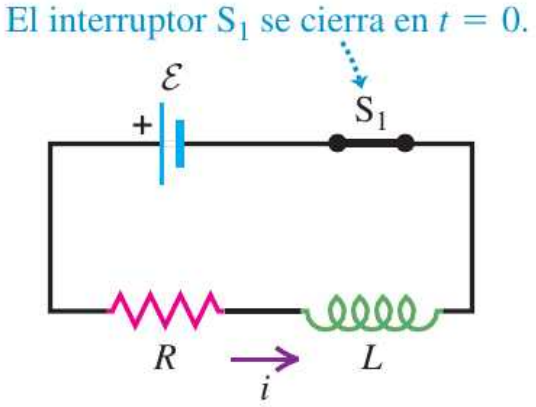
Cuando la corriente se estabiliza, cerramos S_2 y abrimos S_1:

$$0 = i^2R + Li\frac{di}{dt}$$

- i^2R: tasa de energía disipada en el resistor
- $Li\frac{di}{dt}$: tasa de energía suministrada por el inductor (este término es ahora <0)

Problema Análisis de un circuito R-L

Un dispositivo electrónico sensible con resistencia de 175 Ω va a conectarse a una fuente de *fem* por medio de un interruptor. El dispositivo está diseñado para que opere con una corriente de 36 mA, pero, para evitar que sufra daños, la corriente no debe exceder de 4.9 mA en los primeros 58 μs después de cerrar el interruptor. Para proteger el dispositivo, se conecta en serie con un inductor, como se ilustra en la figura. a) ¿Cuál es la *fem* que debe tener la fuente? Suponga que la resistencia interna es despreciable. b) ¿Qué inductancia se requiere? c) ¿Cuál es la constante de tiempo?



SOLUCIÓN:

(a) $\mathcal{E} = IR = (0.036\ \text{A})(175\ \Omega) = 6.3\ \text{V}$

(b) La corriente aumenta según la expresión: $i = \dfrac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \Longrightarrow L = \dfrac{-Rt}{\ln(1 - iR/\mathcal{E})}$

$$= \frac{-(175\ \Omega)(58 \times 10^{-6}\ \text{s})}{\ln[1 - (4.9 \times 10^{-3}\ \text{A})(175\ \Omega)/(6.3\ \text{V})]} = 69\ \text{mH}$$

(c) $\tau = \dfrac{L}{R} = \dfrac{69 \times 10^{-3}\ \text{H}}{175\ \Omega} = 3.9 \times 10^{-4}\ \text{s} = 390\ \mu\text{s}$

Problema Energía en un circuito R-L

Cuando la corriente decae en un circuito R-L, ¿qué fracción de la energía almacenada en el inductor se ha disipado después de 2.3 constantes de tiempo?

SOLUCIÓN:

La energía en el inductor en cualquier instante *t* es: $U = \frac{1}{2}Li^2$

La corriente en cualquier instante *t* es: $i = I_0 e^{-(R/L)t}$

Por tanto: $U = \frac{1}{2}LI_0^2 e^{-2(R/L)t} = U_0 e^{-2(R/L)t}$

Donde U_0 representa la energía total almacenada en el inductor antes de que comience el decaimiento de la corriente.

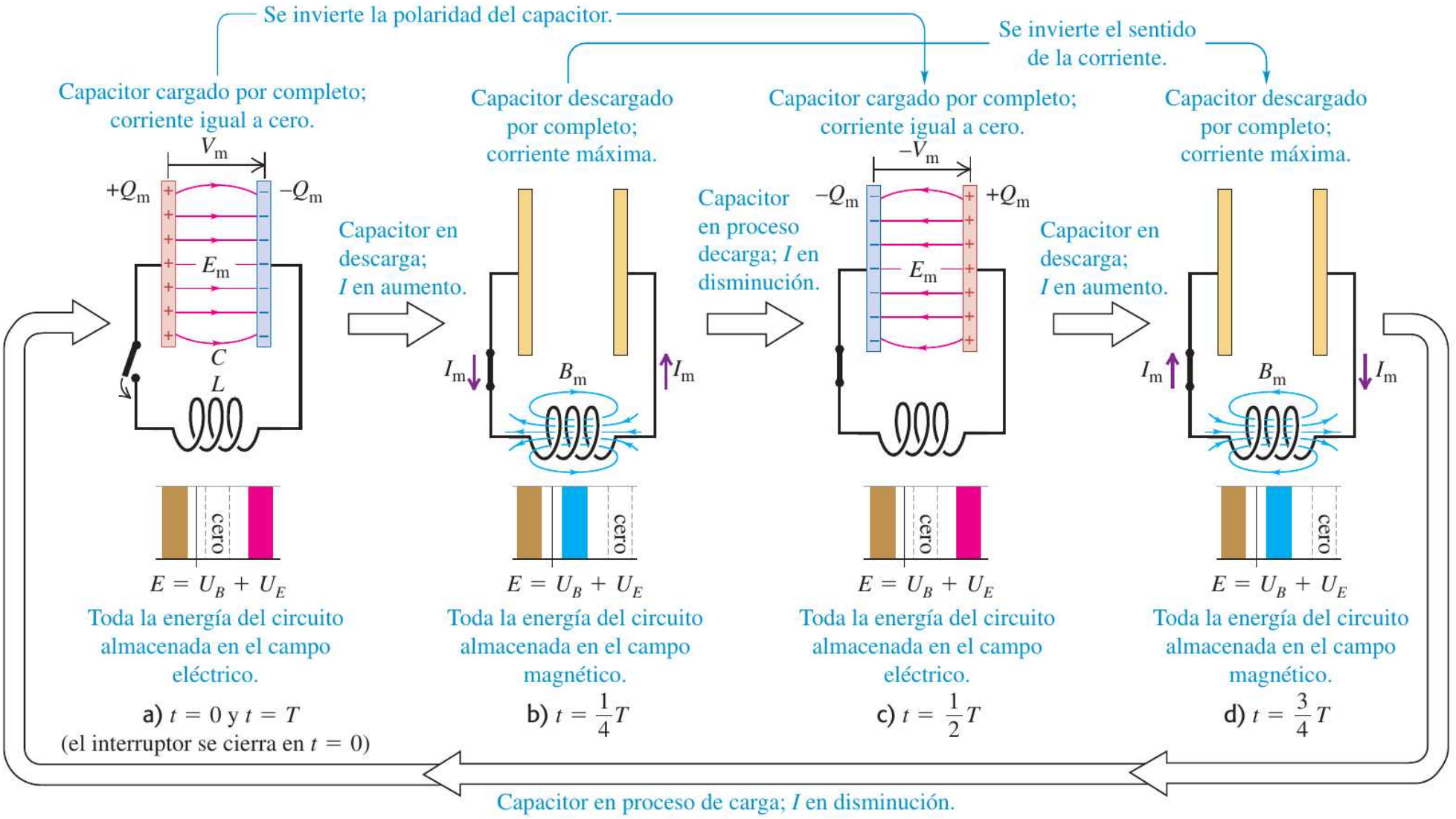
Cuando *t* es igual a 2.3 constantes de tiempo:

$$t = 2.3\tau = 2.3L/R \Rightarrow U = U_0 e^{-2(2.3)} = U_0 e^{-4.6} = 0.010\, U_0$$

Es decir, permanece sólo el 0.010, o 1.0%, de la energía almacenada inicialmente en el inductor; el 99.0% restante se ha disipado en el resistor.

Circuitos L-C

Un circuito que contiene un inductor y un capacitor muestra un modo completamente nuevo de comportamiento, caracterizado por una **corriente y carga del capacitor oscilantes**.


Se invierte la polaridad del capacitor.
Se invierte el sentido de la corriente.
Capacitor cargado por completo; corriente igual a cero.
Capacitor descargado por completo; corriente máxima.
Capacitor cargado por completo; corriente igual a cero.
Capacitor descargado por completo; corriente máxima.
V_m
$+Q_m$
$-Q_m$
E_m
C
L
Capacitor en descarga; I en aumento.
I_m
B_m
Capacitor en proceso decarga; I en disminución.
$-V_m$
Capacitor en descarga; I en aumento.
cero
$E = U_B + U_E$
Toda la energía del circuito almacenada en el campo eléctrico.
a) $t = 0$ y $t = T$
(el interruptor se cierra en $t = 0$)
Toda la energía del circuito almacenada en el campo magnético.
b) $t = \frac{1}{4}T$
Toda la energía del circuito almacenada en el campo eléctrico.
c) $t = \frac{1}{2}T$
Toda la energía del circuito almacenada en el campo magnético.
d) $t = \frac{3}{4}T$
Capacitor en proceso de carga; I en disminución.

Circuitos L-C

Referido a la figura anterior:

a) → b)

a) Se carga el capacitor con una diferencia de potencial V_m y una carga inicial $Q=CV_m$. Luego se cierra el interruptor. El capacitor comienza a descargarse a través del inductor. A causa de la *fem* inducida en el inductor, la corriente no puede cambiar en forma instantánea; lo hace gradualmente hasta alcanzar un valor máximo I_m. Durante esta intensificación de la corriente, el capacitor se está descargando. En cada instante el potencial del capacitor es igual a la *fem* inducida en el inductor, por lo que a medida que el capacitor se descarga, la tasa de cambio de la corriente disminuye (la corriente aumenta cada vez más lentamente). Cuando el potencial del capacitor se reduce a cero, la *fem* inducida también es igual a cero, y la corriente se estabiliza en su valor máximo I_m. Esta siluación se ilustra en la figura b). Durante la descarga del capacitor, la corriente en aumento en el inductor ha establecido un campo magnético en el espacio que lo rodea, y la energía que inicialmente estaba almacenada en el campo eléctrico del capacitor ahora lo está en el campo magnético del inductor.

b) → c)

Aunque en la figura b) el capacitor está completamente descargado, la corriente persiste (no puede cambiar instantáneamente), y el capacitor comienza, inmediatamente después de haberse descargado, a cargarse. Esta vez con polaridad opuesta a la de su estado inicial. Conforme disminuye la corriente según se carga el capacitor, la magnitud del campo magnético también lo hace, lo que induce una *fem* en el inductor en el mismo sentido que el de la corriente; lo que retarda la disminución de la corriente. Con el tiempo, la corriente y el campo magnético disminuyen a cero y el capacitor queda cargado en el sentido opuesto al de su polaridad inicial. Esta siluación se ilustra en la figura c).

Circuitos L-C

Referido a la figura anterior:

c) → d)

El proceso se repite ahora en sentido opuesto. Un poco después, el capacitor se habrá descargado y en el inductor hay una corriente en el sentido opuesto.

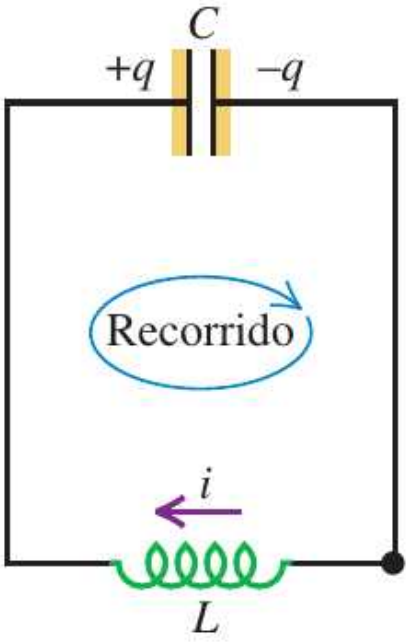
d) → a)

Más tarde, la carga del capacitor recupera su valor original, y todo el proceso se repite.

Si no hay pérdidas de energía, la carga en el capacitor sigue oscilando hacia atrás y adelante indefinidamente. Este proceso se llama **oscilación eléctrica**.

Desde el punto de vista de la energía, las oscilaciones de un circuito eléctrico transfieren energía del campo eléctrico del capacitor al campo magnético del inductor y viceversa. La energía total asociada con el circuito es constante. Esto es análogo a la transferencia de energía en un sistema mecánico que oscila de la energía potencial a la cinética y viceversa, con la energía total constante (ej. un muelle).

Circuitos L-C



Aplicamos la ley de Kirchhoff de las espiras al circuito de la figura:

$$-L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Como $i=dq/dt$, $di/dt=d^2q/dt^2$. Sustituimos esta expresión en la ecuación anterior y dividimos entre $-L$:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Esta ecuación es análoga a la de un movimiento armónico simple. Resolviendo, encontramos:

$$q = Q\cos(\omega t + \phi)$$
$$i = -\omega Q\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

La carga y la corriente oscilan en forma sinusoidal con el tiempo, con una frecuencia angular determinada por los valores de L y C.

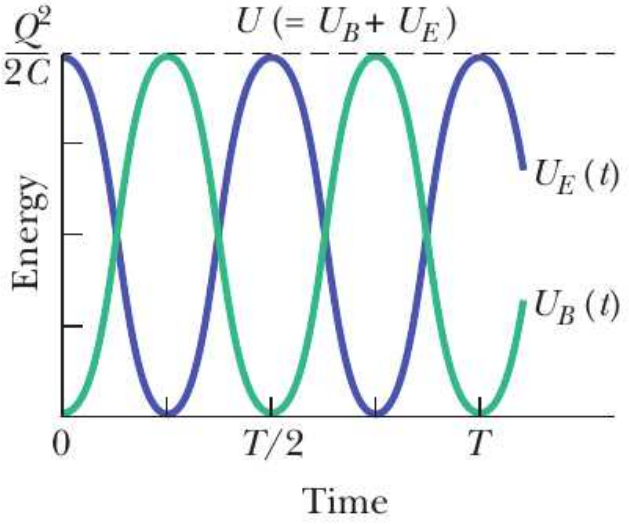
ϕ es una constante y la "frecuencia angular" es:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Como el sistema es conservativo:

$$\frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow i = \pm\sqrt{\frac{1}{LC}}\sqrt{Q^2 - q^2}$$

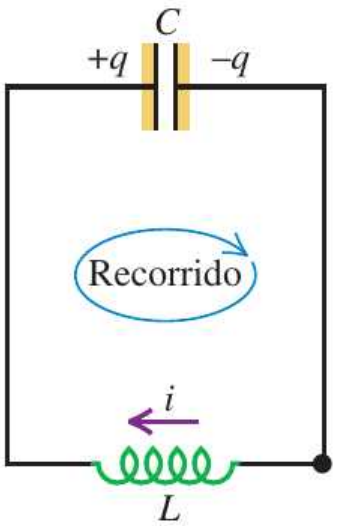
Donde Q es la carga máxima del capacitor.



Problema Circuito oscilante

Una fuente de voltaje de 300 V se utiliza para cargar un capacitor de 25 μF. Una vez que el capacitor está cargado por completo se desconecta de la fuente y se conecta a un inductor de 10 mH. La resistencia en el circuito es despreciable. a) Determine la frecuencia y el periodo de oscilación en el circuito. b) Obtenga la carga del capacitor y la corriente en el circuito 1.2 ms después de haber conectado el inductor y el capacitor. c) Obtenga las energías magnética y eléctrica en ese instante y en t=0.

SOLUCIÓN:



a) La frecuencia angular es: $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(10\times10^{-3}\,\text{H})(25\times10^{-6}\,\text{F})}} = 2.0\times10^{3}\,\text{rad/s}$

Por tanto, la frecuencia es: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2.0\times10^{3}\,\text{rad/s}}{2\pi\,\text{rad/ciclo}} = 320\,\text{Hz}$

Y el periodo: $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{320\,\text{Hz}} = 3.1\times10^{-3}\,\text{s} = 3.1\,\text{ms}$

b) La carga máxima es $Q = C\varepsilon = (25\cdot10^{-6}\,\text{F})(300\,\text{V}) = 7.5\cdot10^{-3}\,\text{C}$.

Como $q(t=0)=Q$, la carga q en cualquier momento es: $q = (7.5\times10^{-3}\,\text{C})\cos\omega t$

En t=2 ms: $\omega t = (2.0\times10^{3}\,\text{rad/s})(1.2\times10^{-3}\,\text{s}) = 2.4\,\text{rad} \Rightarrow q = (7.5\times10^{-3}\,\text{C})\cos(2.4\,\text{rad}) = -5.5\times10^{-3}\,\text{C}$

$i = -\omega Q\,\text{sen}\,\omega t \Rightarrow i = -(2.0\times10^{3}\,\text{rad/s})(7.5\times10^{-3}\,\text{C})\,\text{sen}(2.4\,\text{rad}) = -10\,\text{A}$

Los signos negativos de q e i indican que hay carga negativa en la placa izquierda del capacitor y que la corriente circula en sentido antihorario (dado que el criterio de signos se estableció según lo indicado en la figura que se muestra).

c) En t=0 no hay corriente y q=Q, por lo que: $U_B = \frac{1}{2}Li^2 = 0$ y $U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(7.5\times10^{-3}\,\text{C})^2}{2(25\times10^{-6}\,\text{F})} = 1.1\,\text{J}$

En t=2 ms: $U_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}(10\times10^{-3}\,\text{H})(-10\,\text{A})^2 = 0.5\,\text{J}$

$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{(-5.5\times10^{-3}\,\text{C})^2}{2(25\times10^{-6}\,\text{F})} = 0.6\,\text{J}$

Circuitos L-R-C en serie

El análisis del circuito L-C asume la idealización de que no hay resistencia en el circuito, pero todo inductor real tiene resistencia en sus devanados y también puede haber resistencia en los alambres de conexión. En virtud de la resistencia, la energía electromagnética en el circuito se disipa y se convierte en otras formas, como energía interna de los materiales del circuito o calor. La resistencia en un circuito eléctrico es análoga a la fricción en un sistema mecánico.

Consideremos un circuito en serie L-R-C.

Aplicamos la ley de Kirchoff de las espiras:

$$-iR - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

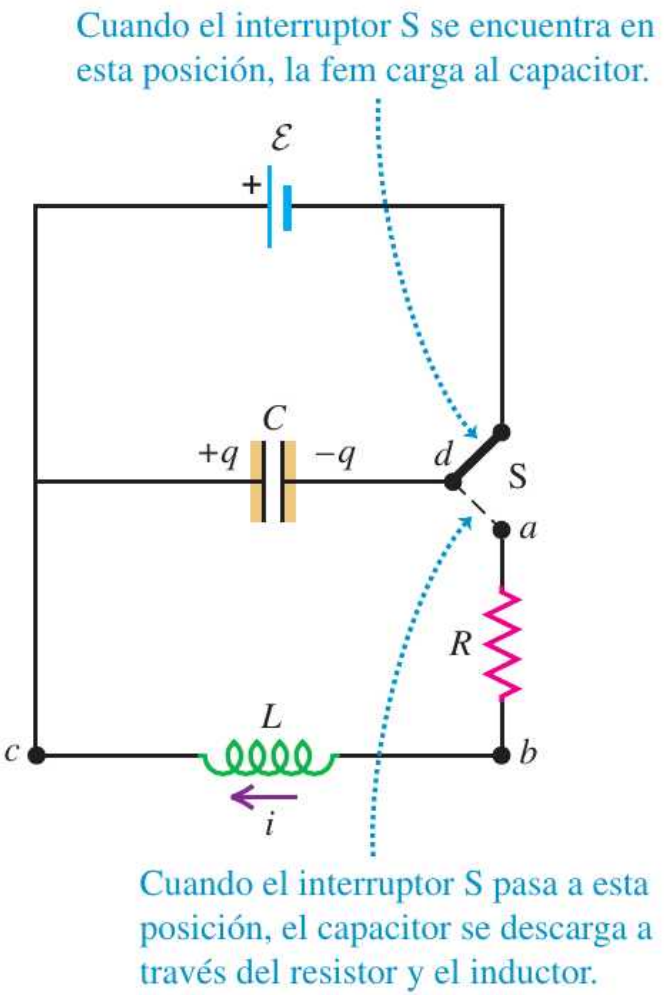
Sustituimos i por dq/dt y reordenamos:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

La solución de esta ecuación diferencial de segundo grado en q es:

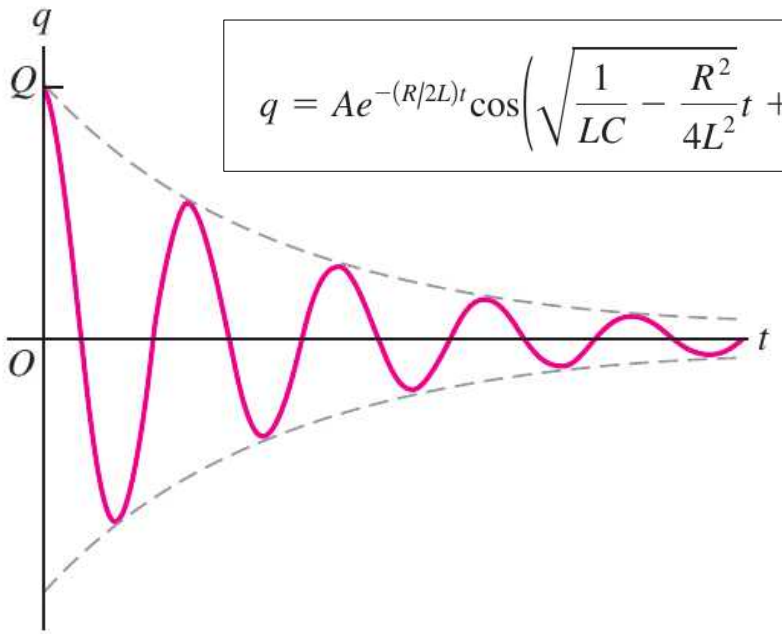
$$q = Ae^{-(R/2L)t}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t + \phi\right)$$

Esta solución es válida para valores de R tales que $R^2<4L/C$.
A y ϕ son constantes.



Circuitos L-R-C en serie

a) Circuito subamortiguado (resistencia R pequeña)



$$q = Ae^{-(R/2L)t}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t + \phi\right)$$

La frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas está dada por:

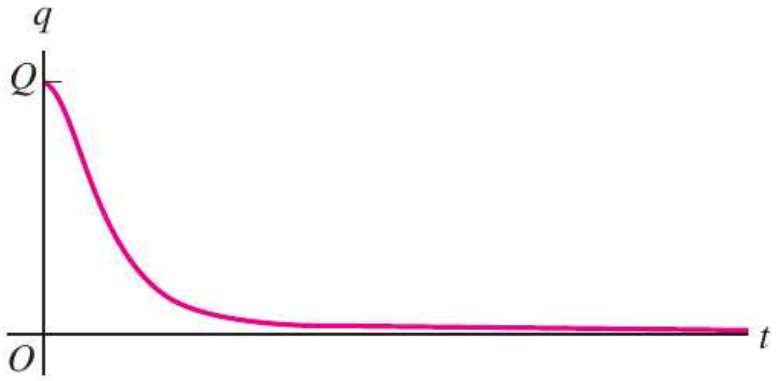
$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Cuando R=0, la solución es igual que pare un circuito L-C.

a) Si la resistencia R es relativamente pequeña, el circuito aún oscila, pero con un movimiento armónico amortiguado y se dice que el circuito está **subamortiguado** (si R se incrementa, las oscilaciones cesan con más rapidez.). En virtud de las pérdidas i^2R en el resistor, la energía del campo magnético adquirida por el inductor cuando el capacitor está descargado por completo es menor que la energía del campo eléctrico original del capacitor.

b) Cuando R alcanza cierto valor crítico, tal que $R^2 \geq 4L/C$, el circuito deja de oscilar; está **sobreamortiguado**.

b) Circuito críticamente amortiguado (resistencia R grande)



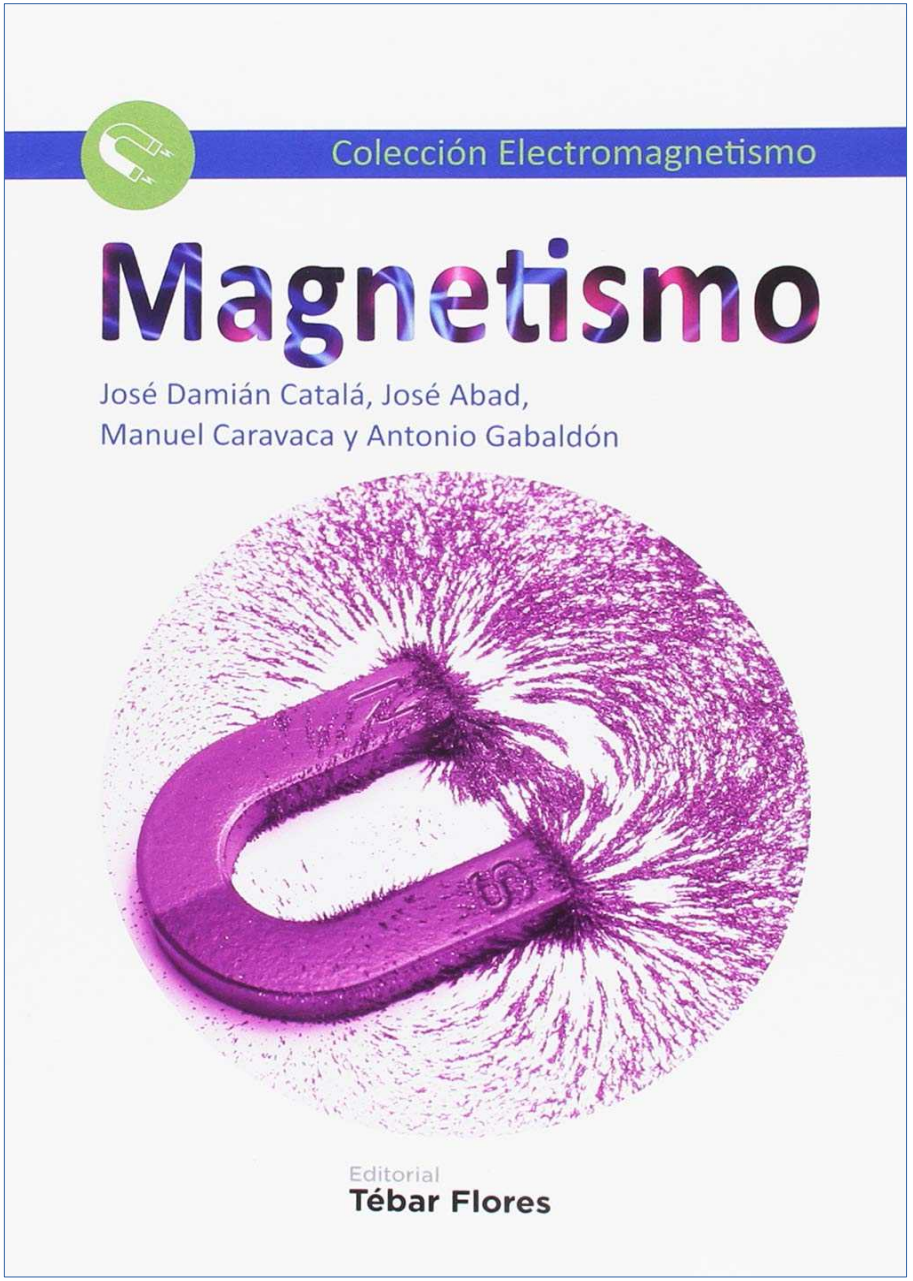
Problema Circuito L-R-C en serie subamortiguado

¿Qué resistencia se requiere (en términos de L y C) para que un circuito L-R-C tenga una frecuencia de oscilación eléctrica equivalente a la mitad de la frecuencia no amortiguada?

SOLUCIÓN:

$$\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \Rightarrow \quad R=\sqrt{\frac{3L}{C}}$$

COMENTARIO:

Comprobamos que este resultado implica un comportamiento oscilatorio (subamortiguado) del sistema, ya que R no alcanza el valor crítico para que deje de serlo.

Bibliografía recomendada